EIN GITTERPUNKTPROBLEM IM DREIDIMENSIONALEN HYPERBOLISCHEN RAUM

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER PHILOSOPHIE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BASEL

VON

FRANÇOIS FRICKER
AUS BASEL

1967

BASEL, 1968
BIRKHÄUSER VERLAG

EIN GITTERPUNKTPROBLEM IM DREIDIMENSIONALEN HYPERBOLISCHEN RAUM

INAUGURALDISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER WÜRDE EINES DOKTORS DER PHILOSOPHIE

VORGELEGT DER

PHILOSOPHISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHEN FAKULTÄT

DER

UNIVERSITÄT BASEL

VON

FRANÇOIS FRICKER
AUS BASEL

BASEL, 1968
BIRKHÄUSER VERLAG

Genehmigt von der Philosophisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät auf Antrag der Herren Professoren Dr. H. HUBER, Dr. M. EICHLER
Basel, den 24. Okt. 1967

Prof. Dr. H. HUBER
Dekan

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Separatabdruck aus
COMMENTARII MATHEMATICI HELVETICI
Bd. 43, Heft 4, 1968

Ein Gitterpunktproblem im dreidimensionalen hyperbolischen Raum

François Fricker (Basel)

Ein Gitterpunktproblem im dreidimensionalen hyperbolischen Raum

François Fricker (Basel)

1. Problemstellung und Ergebnisse

Die vorliegende Arbeit ist als Beitrag zur Behandlung eines Problemkreises gedacht, der erstmals von H. Huber und später auch von O. Herrmann aufgegriffen wurde (siehe Literaturangaben [1]–[4]).

Es bezeichne $\mathfrak{H}$ den dreidimensionalen hyperbolischen Raum, also einen einfachzusammenhängenden und vollständigen dreidimensionalen Riemannschen Raum mit konstanter negativer Gaussscher Krümmung. Die Längenmessung denken wir uns etwa so normiert, dass $\mathfrak{H}$ die konstante Gausssche Krümmung -1 besitzt. Als Modell von $\mathfrak{H}$ dient bekanntlich der obere Halbraum des dreidimensionalen Euklidischen Raumes: $\mathfrak{H} = \{(x, y, z) | z > 0\}$, versehen mit der metrischen Fundamentalform

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{z^2}.$$

Die Geodätischen sind dann die zur Hyperebene $z = 0$ orthogonalen Halbkreise und Halbgeraden. Die hyperbolische Distanz der Punkte $p, q \in \mathfrak{H}$ bezeichnen wir mit $\varrho(p, q)$.

Γ sei nun eine diskontinuierliche (nicht notwendig fixpunktfreie!) Bewegungsgruppe von $\mathfrak{H}$ mit kompaktem, messbarem Fundamentalbereich $\mathfrak{F}$. Ist p ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{H}$, so betrachten wir die Menge

$$\mathfrak{G}_p = \{S(p) | S \in \Gamma\}$$

und sagen, $\mathfrak{G}_p$ sei das vom Punkte p aus durch Γ erzeugte *hyperbolische Gitter*. Jetzt nehmen wir die hyperbolische Kugel mit dem Zentrum p und dem Radius $t > 0$: $K(p, t) = \{q | \varrho(p, q) \leqslant t\}$ und betrachten die Anzahl $N(\Gamma, p, t)$ der Punkte des Gitters $\mathfrak{G}_p$, die in dieser Kugel liegen[1]; oder, anders ausgedrückt, wir betrachten die Anzahl $N(\Gamma, p, t)$ der Elemente der Menge $\{S | S \in \Gamma, \varrho(S(p), p) \leqslant t\}$. (Wegen der Diskontinuität von Γ ist diese Anzahl stets endlich). In der vorliegenden Arbeit stellen wir uns die Aufgabe, das asymptotische Verhalten dieser Gitterpunktsanzahl zu untersuchen.

[1]) Dabei ist jeder Gitterpunkt so oft zu zählen, wie er als Bild von p auftritt. Ist $N'(\Gamma, p, t)$ die Anzahl Gitterpunkte in der angegebenen Kugel, wobei aber jeder Punkt genau einmal gezählt wird, so überlegt man sich leicht: $N(\Gamma, p, t) = N'(\Gamma, p, t) \cdot \mathrm{Ord}\, \Gamma_p$ (vgl. dazu die Vorbemerkung zu Satz 2 in Abschnitt 2).

Unsere Lösung steht im Zusammenhang mit dem Eigenwertproblem

$$\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0 \tag{1}$$

auf $\mathfrak{H}$, wobei Δ den zu $\mathfrak{H}$ gehörigen Laplace-Beltrami-Operator bezeichne. Dabei heisse die (reelle oder komplexe) Zahl λ *Eigenwert*, wenn es auf $\mathfrak{H}$ eine nicht identisch verschwindende bezüglich Γ automorphe (reelle oder komplexe) Funktion φ gibt, welche nach den Koordinaten von $\mathfrak{H}$ zweimal stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung (1) erfüllt. Jede solche Funktion heisse eine zum Eigenwert λ gehörige *Eigenfunktion*.

Wir werden im nächsten Abschnitt sehen: Es gibt stets unendlich viele Eigenwerte; sie sind alle reell und, abgesehen vom trivialen Eigenwert $\lambda = 0$, positiv und häufen sich nirgends im Endlichen. Die zu jedem Eigenwert λ gehörigen Eigenfunktionen bilden einen Vektorraum ε_λ endlicher Dimension über dem komplexen Zahlkörper. Ist dann $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n\}$ eine Orthonormalbasis von ε_λ, dass heist, gilt

$$\int_{\mathfrak{F}} \varphi_l(p)\,\overline{\varphi_m(p)}\,dp = \begin{cases} 1, & \text{für } l = m \\ 0, & \text{für } l \neq m \end{cases}$$

so setzen wir

$$K_\lambda(p, q) = \sum_{l=1}^{n} \varphi_l(p)\,\overline{\varphi_l(q)}.$$

(Man beachte: a) dp bezeichne hier und auch im folgenden stets das hyperbolische Volumenelement; b) $K_\lambda(p, q)$ ist eindeutig definiert, da $K_\lambda(p, q)$ offenbar einem Basiswechsel gegenüber invariant ist). Um im folgenden die Schreibweise zu vereinfachen setzen wir $K_\lambda(p, q) = 0$, falls λ *kein* Eigenwert ist, und $K_\lambda(p, p) = K_\lambda(p)$. Bezeichnen wir schliesslich mit $|\mathfrak{F}|$ den hyperbolischen Inhalt von $\mathfrak{F}$, so können wir die Lösung unseres Problems wie folgt formulieren:

HAUPTSATZ. *Für* $t \to +\infty$ *gilt:*

$$N(\Gamma, p, t) = \frac{\pi}{2|\mathfrak{F}|} e^{2t} + \pi \sum_{0<\lambda<3/4} \frac{K_\lambda(p)}{+\sqrt{1-\lambda}\,(1+{}+\sqrt{1-\lambda})} e^{(1+{}+\sqrt{1-\lambda})t} + O(e^{3/2\,t}).$$

Es ist zu erwarten, dass die Anwendung dieses Satzes auf gewisse arithmetisch definierte Bewegungsgruppen (siehe [5], p. 501–634) interessante zahlentheoretische Ergebnisse liefert. Darauf soll in einer späteren Arbeit eingegangen werden.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn Prof. Dr. H. HUBER, der mich zu dieser Arbeit angeregt hat, für seine vielen wertvollen Hinweise meinen besten Dank aussprechen.

2. Das Eigenwertproblem $\Delta\varphi+\lambda\varphi=0$ auf $\mathfrak{H}$

Die auf $\mathfrak{H}$ bezüglich Γ automorphen Funktionen können als eindeutige Funktionen auf $\mathfrak{H}/\Gamma$ aufgefasst werden. Enthält die Gruppe Γ keine Bewegungen mit Fixpunkten, so wird $\mathfrak{H}/\Gamma$ eine geschlossene Riemannsche Mannigfaltigkeit und unser Eigenwertproblem kann im Rahmen der Theorie linearer Integralgleichungen mit symmetrischem Kern behandelt werden (vgl. [6] und insbesondere [7]). Dabei ergeben sich die bereits im ersten Abschnitt genannten Resultate. Die zum Eigenwert $\lambda=0$ gehörigen Eigenfunktionen sind offensichtlich harmonisch auf der geschlossenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{H}/\Gamma$ und somit konstant; ε_0 hat deshalb die Dimension 1 und $\varphi=1/\sqrt{|\mathfrak{F}|}$ ist normiertes Basiselement von ε_0. Im weiteren liefert die Integralgleichungstheorie den folgenden

SATZ 1 (Entwicklungssatz). *Ist f eine bezüglich Γ automorphe (reelle oder komplexe) Funktion, die nach den Koordinaten von $\mathfrak{H}$ zweimal stetig differenzierbar ist, so konvergiert die Fourierreihe*

$$\sum_{\lambda}\int_{\mathfrak{F}} K_\lambda(p,q)\,f(q)\,dq$$

absolut und gleichmässig für alle $p\in\mathfrak{H}$ und stellt $f(p)$ dar.

Für die Behandlung unseres Problemes ist es ausschlaggebend, dass alle bisher zum Eigenwertproblem $\Delta\varphi+\lambda\varphi=0$ gemachten Aussagen (inkl. Entwicklungssatz) auch dann richtig sind, wenn Γ Bewegungen mit Fixpunkten enthält.

Beweis: Es sei also Γ nicht mehr fixpunktfrei. Nach A. SELBERG ([8], p. 154) existiert ein fixpunktfreier Normalteiler N von Γ mit endlichem Index $[\Gamma:N]=n$. Ist dann $S_1, S_2, \ldots, S_n$ ein vollständiges Repräsentantensystem der Restklassen $\Gamma \bmod N$, so ist $\mathfrak{F}_N=\bigcup_{l=1}^{n} S_l(\mathfrak{F})$ ein kompakter, messbarer Fundamentalbereich der Gruppe N.

Wir definieren wie früher

$$\varepsilon_\lambda(\Gamma)=\{\varphi\mid\varphi\in C^2(\mathfrak{H}),\ \varphi\circ S=\varphi \text{ für alle } S\in\Gamma,\ \Delta\varphi+\lambda\varphi=0\}$$

und analog

$$\varepsilon_\lambda(N)=\{\varphi\mid\varphi\in C^2(\mathfrak{H}),\ \varphi\circ T=\varphi \text{ für alle } T\in N,\ \Delta\varphi+\lambda\varphi=0\}.$$

Es ist offensichtlich $\varepsilon_\lambda(N)\supset\varepsilon_\lambda(\Gamma)$ für jedes λ, wobei für $\lambda=0$ auf jeden Fall das Gleichheitszeichen besteht. Wie wir wissen, ist $\dim\varepsilon_\lambda(N)=r$ stets endlich und somit erst recht $\dim\varepsilon_\lambda(\Gamma)=s$ stets endlich und $s\leqslant r$.

Es bezeichne

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$$

eine Orthonormalbasis von $\varepsilon_\lambda(N)$ bezüglich des Skalarproduktes $(\varphi_i, \varphi_k)_N = \int_{\mathfrak{F}_N} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp$. Wir dürfen und wollen annehmen, diese Orthonormalbasis sei so gewählt, dass die ersten s Basiselemente $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ den Raum $\varepsilon_\lambda(\Gamma)$ aufspannen. Der durch die restlichen Basiselemente $\varphi_{s+1}, \varphi_{s+2}, \ldots, \varphi_r$ aufgespannte Raum $\varepsilon_\lambda(\Gamma)^\perp$ ist orthogonal zu $\varepsilon_\lambda(\Gamma)$ im Sinne des eben definierten Skalarproduktes. Ist nun $\varphi_i, \varphi_k \in \varepsilon_\lambda(\Gamma)$, so gilt

$$(\varphi_i, \varphi_k)_N = \int_{\mathfrak{F}_N} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp = \int_{\bigcup_{l=1}^{n} S_l(\mathfrak{F})} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \int_{S_l(\mathfrak{F})} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp = n \int_{\mathfrak{F}} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp$$

(Bei dieser Umformung wurde ausgenützt, dass φ_i und φ_k bezüglich Γ automorph sind und dass das Volumenelement dp gegenüber den Bewegungen von $\mathfrak{H}$ invariant ist. Diese Methode der Umformung wird im folgenden noch mehrmals angewendet).

Deshalb ist

$$\sqrt{n}\,\varphi_1, \sqrt{n}\,\varphi_2, \ldots, \sqrt{n}\,\varphi_s$$

eine Orthonormalbasis von $\varepsilon_\lambda(\Gamma)$ (im alten Sinne). Mit den eben eingeführten Bezeichnungen ergeben sich die folgenden Beziehungen (1)–(3).

$$\varphi \in \varepsilon_\lambda(N), \quad S \in \Gamma \Rightarrow \varphi \circ S \in \varepsilon_\lambda(N). \tag{1}$$

Ist nämlich $T \in N$ beliebig, so existiert $T^* \in N$ mit $S \circ T = T^* \circ S$, also

$$\varphi \circ S \circ T = \varphi \circ T^* \circ S = \varphi \circ S.$$

Weiter ist mit $\Delta\varphi + \lambda\varphi = 0$ auch $\Delta(\varphi \circ S) + \lambda(\varphi \circ S) = 0$, da der Laplace–Beltrami-Operator bekanntlich bewegungsinvariant ist.

$$\varphi \in \varepsilon_\lambda(\Gamma)^\perp, S \in \Gamma \Rightarrow \varphi \circ S \in \varepsilon_\lambda(\Gamma)^\perp. \tag{2}$$

Es genügt offenbar, diese Behauptung für die Basiselemente φ_i $(i = s+1, s+2, \ldots, r)$ von $\varepsilon_\lambda(\Gamma)^\perp$ nachzuweisen. Nach (1) ist jedenfalls $\varphi_i \circ S \in \varepsilon_\lambda(N)$ und wir erhalten als Skalarprodukt mit einem beliebigen Basiselement φ_k $(k = 1, 2, \ldots, s)$ von $\varepsilon_\lambda(r)$

$$(\varphi_i \circ S, \varphi_k)_N = \int_{\bigcup_{l=1}^{n} S_l(\mathfrak{F})} \varphi_i(S(p))\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp$$

$$= \int_{\bigcup_{l=1}^{n} S_l \circ S(\mathfrak{F})} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp = \int_{\bigcup_{l=1}^{n} S_l(\mathfrak{F})} \varphi_i(p)\,\overline{\varphi_k(p)}\,dp = (\varphi_i, \varphi_k)_N = 0.$$

Daraus folgt sofort $\varphi_i \circ S \in \varepsilon_\lambda(\Gamma)^\perp$.

$$\sum_{l=1}^{n} \varphi_i \circ S_l = 0 \quad \text{für} \quad i = s+1, s+2, \ldots, r. \tag{3}$$

Denn es ist einerseits nach (2) $\phi_i = \sum_{l=1}^{n} \varphi_i \circ S_l \in \varepsilon_\lambda(\Gamma)^\perp$ und andrerseits wegen $\phi_i \circ S = \sum_{l=1}^{n} \varphi_i \circ S_l \circ S = \sum_{l=1}^{n} \varphi_i \circ S_l = \phi_i$ für jedes $S \in \Gamma$ auch $\phi_i \in \varepsilon_\lambda(\Gamma)$, also $\phi_i = 0$.

Entsprechend den früheren Bezeichnungen bilden wir jetzt

$$K_\lambda^N(p, q) = \sum_{i=1}^{r} \varphi_i(p)\, \overline{\varphi_i(q)}$$

und

$$K_\lambda(p, q) = \sum_{i=1}^{s} \left(\sqrt{n}\, \varphi_i(p)\right) \overline{\left(\sqrt{n}\, \varphi_i(q)\right)} = n \sum_{i=1}^{s} \varphi_i(p)\, \overline{\varphi_i(q)}.$$

Dann gilt

$$K_\lambda^N(p, q) = \frac{1}{n} K_\lambda(p, q) + \sum_{i=s+1}^{r} \varphi_i(p)\, \overline{\varphi_i(q)}.$$

Ersetzen wir hier das Argument p durch $S_l(p)$ und summieren sodann über $l = 1, 2, \ldots, n$, so erhalten wir wegen (3)

$$K_\lambda(p, q) = \sum_{l=1}^{n} K_\lambda^N(S_l(p), q). \tag{4}$$

Sei nun $f \in C^2(\mathfrak{H})$ und automorph bezüglich Γ. Dann ist erst recht f automorph bezüglich N und wir können den klassischen Entwicklungssatz anwenden:

$$f(p) = \sum_\lambda \int_{\mathfrak{F}_N} K_\lambda^N(p, q)\, f(q)\, dq.$$

Wird hier wiederum p durch $S_l(p)$ ersetzt und sodann über $l = 1, 2, \ldots, n$ summiert, so erhält man unter Berücksichtigung von (4)

$$\begin{aligned} n f(p) &= \sum_\lambda \int_{\mathfrak{F}_N} K_\lambda(p, q)\, f(q)\, dq \\ &= \sum_\lambda \int_{\bigcup_{l=1}^{n} S_l(\mathfrak{F})} K_\lambda(p, q)\, f(q)\, dq = n \sum_\lambda \int_{\mathfrak{F}} K_\lambda(p, q)\, f(q)\, dq, \end{aligned}$$

also in der Tat

$$f(p) = \sum_\lambda \int_{\mathfrak{F}} K_\lambda(p, q)\, f(q)\, dq \tag{5}$$

q.e.d.

Neben dem Entwicklungssatz benötigen wir noch eine Formel, welche die asymptotische Verteilung der $K_\lambda(p)$ beschreibt.

Ist $p \in \mathfrak{H}$, so bezeichne Γ_p die Gruppe derjenigen Bewegungen $S \in \Gamma$, für die gilt: $S(p) = p$. Wegen der Diskontinuität von Γ ist die Ordnung dieser Gruppe ($= \operatorname{Ord} \Gamma_p$) endlich. Die erwähnte asymptotische Verteilung wird jetzt gegeben durch den

SATZ 2. *Es gilt*

$$\sum_{\lambda \leq x} K_\lambda(p) \sim \frac{\operatorname{Ord} \Gamma_p}{6\pi^2} x^{3/2} \tag{6}$$

für $x \to +\infty$.

Beweis: N bezeichne wieder den fixpunktfreien Normalteiler von Γ; dabei kann jetzt auch $N = \Gamma$ sein, nämlich dann, wenn Γ schon fixpunktfrei ist. (In diesem Fall ist $\operatorname{Ord} \Gamma_p = 1$ für alle p).

Der Arbeit [7] entnimmt man den folgenden – in seiner Formulierung für unsere Zwecke zugeschnittenen –

HILFSSATZ. *Die Dirichletreihe*

$$\sum_{\lambda > 0} \frac{K_\lambda^N(p, q)}{\lambda^s}$$

besitzt eine endliche Konvergenzabszisse $\sigma(p, q)$. *In* $\operatorname{Re} s > \sigma(p, q)$ *gilt die Darstellung*

$$\sum_{\lambda > 0} \frac{K_\lambda^N(p, q)}{\lambda^s} = \frac{\chi(p, q)}{4\pi^2} \frac{1}{s - \frac{3}{2}} + G_{(p,q)}(s)$$

wobei

$$\chi(p, q) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad p \equiv q \mod N \\ 0 & \text{für} \quad p \not\equiv q \mod N \end{cases}$$

und $G_{(p,q)}$ *holomorph ist in einem Gebiet, das* $\operatorname{Re} s \geq \frac{3}{2}$ *enthält.*

Die Elemente von Γ_p: $U_1 = \mathrm{Id.}, U_2, \ldots, U_m$ gehören paarweise verschiedenen Restklassen $\Gamma \bmod N$ an. Denn aus einer Beziehung $T \circ U_i = U_k$ mit $T \in N$ folgt wegen $U_i(p) = U_k(p) = p : T(p) = p$, was wegen der Fixpunktfreiheit von N nur für $T = \mathrm{Id.}$, also $U_i = U_k$ möglich ist. Die Restklassen NU_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) sind also paarweise disjunkt. $U_{m+1}, U_{m+2}, \ldots, U_n$ seien Repräsentanten der übrigen Restklassen $\Gamma \bmod N$. Hier gilt $U_i(p) \not\equiv p \bmod N$. Denn aus einer Beziehung $U_i(p) = T(p)$ mit $T \in N$ würde folgen: $T^{-1} \circ U_i \in \Gamma_p$ und U_i würde bereits einer der Restklassen NU_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) angehören. Aus dem Hilfssatz, Formel (4) und den besprochenen Eigenschaften des Repräsentantensystems $U_1, U_2, \ldots, U_n$ ergibt sich nacheinander: Für $\operatorname{Re} s > \operatorname{Max}_{1 \leq l \leq n} \sigma(U_l(p), p)$ gilt

$$\sum_{\lambda > 0} \frac{K_\lambda(p)}{\lambda^s} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{\lambda > 0} \frac{K_\lambda^N(U_l(p), p)}{\lambda^s}$$

Die Reihe links besitzt eine endliche Konvergenzabszisse σ und lässt sich über diese hinaus meromorph in ein Gebiet fortsetzen, das $\mathrm{Re}\, s \geqslant \frac{3}{2}$ enthält. Die so fortgesetzte Funktion besitzt einen einzigen Pol, der in $s=\frac{3}{2}$ liegt. Daraus und aus $K_\lambda(p) \geqslant 0$ folgt nach einem Satz von LANDAU ([9], p. 880), dass $\sigma=\frac{3}{2}$ sein muss. Zudem ist der Pol der fortgesetzten Funktion einfach und das Residuum ist wegen $m=\mathrm{Ord}\, \Gamma_p$ gleich

$$\frac{\mathrm{Ord}\, \Gamma_p}{4\pi^2}$$

Die behauptete Formel (6) ergibt sich jetzt sofort aus dem Tauberschen Theorem von WIENER–IKEHARA ([10], p. 127).

3. Beweis des Hauptsatzes

1. Es sei $F \in C^2(0, +\infty)$ eine reelle Funktion mit kompaktem Träger. Ist $q \in \mathfrak{H}$ ein beliebiger Punkt, so betrachten wir die Funktion

$$f_q(p) = \sum_{S \in \Gamma} F(\varrho(S(p), q)).$$

Diese Funktion ist wohl definiert auf $\mathfrak{H}$, da Γ diskontinuierlich ist und F einen kompakten Träger besitzt. Ausserdem ist offensichtlich $f_q(p) \in C^2(\mathfrak{H})$ und automorph bezüglich Γ. Wir können deshalb auf diese Funktion den in Abschnitt 2 genannten Entwicklungssatz anwenden. Dazu berechnen wir zuerst die Fourierkoeffizienten.

2. Ist $\varphi \in \varepsilon_\lambda$, so erhalten wir als Fourierkoeffizienten

$$\left.\begin{aligned} &\int_{\mathfrak{F}} f_q(p)\, \overline{\varphi(p)}\, dp \\ &\quad = \int_{\mathfrak{F}} \sum_{S \in \Gamma} F(\varrho(S(p), q))\, \overline{\varphi(p)}\, dp = \sum_{S \in \Gamma} \int_{\mathfrak{F}} F(\varrho(S(p), q))\, \overline{\varphi(S(p))}\, dp \\ &\quad = \sum_{S \in \Gamma} \int_{S(\mathfrak{F})} F(\varrho(p, q))\, \overline{\varphi(p)}\, dp = \int_{\mathfrak{H}} F(\varrho(p, q))\, \overline{\varphi(p)}\, dp. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

3. Um das letzte Integral weiter ausrechnen zu können, führen wir in $\mathfrak{H}$ *geodätische Polarkoordinaten* mit dem Pol q ein. Darunter ist folgendes zu verstehen: Ist ξ ein Punkt der zweidimensionalen euklidischen Sphäre $\mathfrak{S} = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) | \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\}$ und ϱ eine reelle positive Zahl, so erhält man den Punkt $p = (\xi, \varrho)$, indem man auf dem durch die Richtung des Ortsvektors $\vec{\xi}$ festgelegten geodätischen Strahl von q aus den Abstand ϱ abträgt. In diesen neuen Koordinaten nimmt die

metrische Fundamentalform die Gestalt

$$ds^2 = d\varrho^2 + \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\sigma^2 \tag{2}$$

an, wenn $d\sigma$ das (euklidische) Linienelement auf $\mathfrak{S}$ bezeichnet (vgl. dazu etwa [11], *p.* 183). Daraus erhalten wir für das Volemenelement

$$dp = \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho \, d\xi , \tag{3}$$

wenn $d\xi$ das (euklidische) Flächenelement auf $\mathfrak{S}$ bezeichnet. (1) kann jetzt deshalb auch in der folgenden Gestalt

$$\int_0^\infty F(\varrho) \operatorname{Sin}^2 \varrho \left(\int_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho) \, d\xi \right) d\varrho \tag{4}$$

geschrieben werden, wenn wir $\phi(\xi, \varrho) = \overline{\varphi(p)}$ setzen.

4. Es ist allgemein in einem n-dimensionalen Riemannschen Raum mit Koordinaten $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ und metrischer Fundamentalform

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik} \, dx_i \, dx_k$$

der Laplace–Beltrami-Operator Δ gleich

$$\Delta = \frac{1}{+\sqrt{g}} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{n} g^{ik} {}_{+}\sqrt{g} \, \frac{\partial}{\partial x_k} \right), \tag{5}$$

wo $g = \det(g_{ik})$. Daraus erhalten wir nach einer kleineren Rechnung für den Laplace–Beltrami-Operator von $\mathfrak{H}$, ausgedrückt in geodätischen Polarkoordinaten,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} + 2 \operatorname{Ctg} \varrho \, \frac{\partial}{\partial \varrho} + \operatorname{Sin}^{-2} \varrho \cdot \Delta_{\mathfrak{S}}, \tag{6}$$

wobei $\Delta_{\mathfrak{S}}$ der Laplace–Beltrami-Operator von $\mathfrak{S}$ ist.

5. Wir können nun (4) weiter ausrechnen, wenn wir benützen, dass $\phi(\xi, \varrho)$ Eigenfunktion ist. Wegen (6) bedeutet dies

$$\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \phi(\xi, \varrho) + 2 \operatorname{Ctg} \varrho \, \frac{\partial}{\partial \varrho} \phi(\xi, \varrho) + \operatorname{Sin}^{-2} \varrho \, (\Delta_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho)) + \lambda \phi(\xi, \varrho) = 0 .$$

Durch Integration über $\mathfrak{S}$ erhalten wir

$$\frac{\partial^2}{\partial \varrho^2} \int_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho) \, d\xi + 2 \operatorname{Ctg} \varrho \, \frac{\partial}{\partial \varrho} \int_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho) \, d\xi + \lambda \int_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho) \, d\xi = 0$$

oder, wenn wir $y = y(\varrho) = \int_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho) d\xi$ setzen, die Differentialgleichung

$$y'' + 2 \operatorname{Ctg} \varrho \, y' + \lambda y = 0. \tag{7}$$

Diese Differentialgleichung geht durch die Substitution $z = y \operatorname{Sin} \varrho$ über in

$$z'' + (\lambda - 1) z = 0.$$

Daraus erhalten wir als allgemeine Lösung von (7)

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{1}{\operatorname{Sin} \varrho} (c_1 \varrho + c_2), & \text{für} \quad \lambda = 1 \\ \dfrac{1}{\operatorname{Sin} \varrho} (c_1 \operatorname{Sin}_{+\sqrt{1-\lambda}} \varrho + c_2 \operatorname{Cos}_{+\sqrt{1-\lambda}} \varrho), & \text{für} \quad \lambda < 1 \\ \dfrac{1}{\operatorname{Sin} \varrho} (c_1 \sin_{+\sqrt{\lambda-1}} \varrho + c_2 \cos_{+\sqrt{\lambda-1}} \varrho), & \text{für} \quad \lambda > 1. \end{array} \right\} \tag{8}$$

Wegen

$$\lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho) \, d\xi = \lim_{\varrho \downarrow 0} \int_{\mathfrak{S}} \overline{\varphi(p)} \, d\xi = \int_{\mathfrak{S}} \overline{\varphi(q)} \, d\xi = 4\pi \overline{\varphi(q)}$$

erhalten wir aus (8)

$$\int_{\mathfrak{S}} \phi(\xi, \varrho) \, d\xi = \left\{ \begin{array}{ll} 4\pi \overline{\varphi(q)} \dfrac{\varrho}{\operatorname{Sin} \varrho}, & \text{für} \quad \lambda = 1 \\ \dfrac{4\pi \overline{\varphi(q)}}{+\sqrt{1-\lambda}} \dfrac{\operatorname{Sin}_{+\sqrt{1-\lambda}} \varrho}{\operatorname{Sin} \varrho}, & \text{für} \quad \lambda < 1 \\ \dfrac{4\pi \overline{\varphi(q)}}{+\sqrt{\lambda-1}} \dfrac{\sin_{+\sqrt{\lambda-1}} \varrho}{\operatorname{Sin} \varrho}, & \text{für} \quad \lambda > 1 \end{array} \right.$$

und somit für (4)

$$\int_{\mathfrak{F}} f_q(p) \overline{\varphi(p)} \, dp = \left\{ \begin{array}{ll} 4\pi \overline{\varphi(q)} \displaystyle\int_0^\infty F(\varrho) \varrho \operatorname{Sin} \varrho \, d\varrho, & \text{für} \quad \lambda = 1 \\ \dfrac{4\pi \overline{\varphi(q)}}{\sqrt{1-\lambda}} \displaystyle\int_0^\infty F(\varrho) \operatorname{Sin}_{+\sqrt{1-\lambda}} \varrho \operatorname{Sin} \varrho \, d\varrho, & \text{für} \quad \lambda < 1 \\ \dfrac{4\pi \overline{\varphi(q)}}{\sqrt{\lambda-1}} \displaystyle\int_0^\infty F(\varrho) \sin_{+\sqrt{\lambda-1}} \varrho \operatorname{Sin} \varrho \, d\varrho, & \text{für} \quad \lambda > 1. \end{array} \right\} \tag{9}$$

6. Wir setzen zur Abkürzung

$$\alpha = \alpha(\lambda) = {}_{+}\sqrt{|1-\lambda|}\,.$$

Die Anwendung des Entwicklungssatzes liefert jetzt

$$f_q(p) = \sum_{0 \leqq \lambda < 1} \frac{4\pi}{\alpha} K_\lambda(p,q) \int_0^\infty F(\varrho) \operatorname{Sin} \alpha\varrho \operatorname{Sin} \varrho \, d\varrho$$

$$+ 4\pi K_1(p,q) \int_0^\infty F(\varrho)\, \varrho \operatorname{Sin} \varrho \, d\varrho + \sum_{\lambda > 1} \frac{4\pi}{\alpha} K_\lambda(p,q) \int_0^\infty F(\varrho) \sin \alpha\varrho \operatorname{Sin} \varrho \, d\varrho.$$

Spezialisieren wir diese Formel auf den Fall $p = q$ und beachten wir noch, dass $K_0(p,q) = 1/|\mathfrak{F}|$, so bekommen wir schliesslich

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{S \in \Gamma} F(\varrho(S(p), p)) \\ &= \frac{4\pi}{|\mathfrak{F}|} \int_0^\infty F(\varrho) \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho + 4\pi \sum_{0 < \lambda < 1} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha} \int_0^\infty F(\varrho) \operatorname{Sin} \varrho \operatorname{Sin} \alpha\varrho \, d\varrho \\ &+ 4\pi K_1(p) \int_0^\infty F(\varrho)\, \varrho \operatorname{Sin} \varrho \, d\varrho + 4\pi \sum_{\lambda > 1} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha} \int_0^\infty F(\varrho) \operatorname{Sin} \varrho \sin \alpha\varrho \, d\varrho\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Diese Entwicklung ist also richtig für jede reelle Funktion $F \in C^2(0, +\infty)$ mit kompaktem Träger.

7. Es sei $g(\varrho) \in C^3$ [1, 2] reell und erfülle die Bedingungen

$$g'(\varrho) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad \varrho \in [1,2]$$

$$g(1) = 0,\ g(2) = 1 \qquad g^{(i)}(1) = g^{(i)}(2) = 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2, 3\,.$$

(Ein solches g gibt es offensichtlich). Bei fest gewähltem t, das etwa grösser als 3 sein soll, definieren wir die Funktion $F_t(\varrho)$ durch

$$F_t(\varrho) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad 0 \leqslant \varrho < 1 \\ g(\varrho), & \text{für} \quad 1 \leqslant \varrho \leqslant 2 \\ 1, & \text{für} \quad 2 < \varrho < t \\ k(\varrho) = g\left(2 - (\varrho - t)\, e^{t/2}\right), & \text{für} \quad t \leqslant \varrho \leqslant t + e^{-t/2} \\ 0, & \text{für} \quad \varrho > t + e^{-t/2} \end{cases}$$

und die Funktion $G_t(\varrho)$ durch

$$G_t(\varrho) = \begin{cases} F_t(\varrho), & \text{für } 0 \leqslant \varrho \leqslant t - e^{-t/2} \\ F_t(\varrho + e^{-t/2}), & \text{für } \varrho > t - e^{-t/2}. \end{cases}$$

Anhand des Verlaufes dieser beiden Funktionen macht man sich leicht die beiden folgenden Ungleichungen klar:

$$\sum_{S \in \Gamma} G_t(\varrho(S(p), p)) \leqslant N(\Gamma, p, t) \leqslant N(\Gamma, p, 2) + \sum_{S \in \Gamma} F_t(\varrho(S(p), p)). \tag{11}$$

Da $F_t(\varrho) \in C^2(0, +\infty)$ ist und kompakten Träger besitzt, lässt sich auf die rechte Seite von (11) die Entwicklung (10) anwenden. Wir untersuchen im folgenden (*8.–11.*) die dabei entstehenden Integrale.

8. Es ist

$$\int_0^\infty F_t(\varrho) \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho = \int_1^2 g(\varrho) \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho + \int_2^t \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho + \int_t^{t+e^{-t/2}} k(\varrho) \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho$$

Beachten wir

$$\int_2^t \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho = \frac{e^{2t}}{8} + O(t) \quad \text{für} \quad t \to +\infty$$

und

$$\left| \int_t^{t+e^{-t/2}} k(\varrho) \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho \right| \leqslant \int_t^{t+e^{-t/2}} \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho \leqslant e^{-t/2} \operatorname{Sin}^2(t + e^{-t/2}) = O(e^{3/2\,t}),$$

so bekommen wir

$$\int_0^\infty F_t(\varrho) \operatorname{Sin}^2 \varrho \, d\varrho = \frac{e^{2t}}{8} + O(e^{3/2\,t}) \quad \text{für} \quad t \to +\infty. \tag{12}$$

9. Es ist

$$\int_0^\infty F_t(\varrho) \operatorname{Sin} \varrho \operatorname{Sin} \alpha\varrho \, d\varrho = \int_1^2 g(\varrho) \operatorname{Sin} \varrho \operatorname{Sin} \alpha\varrho \, d\varrho + \int_2^t \operatorname{Sin} \varrho \operatorname{Sin} \alpha\varrho \, d\varrho + \int_t^{t+e^{-t/2}} k(\varrho) \operatorname{Sin} \varrho \operatorname{Sin} \alpha\varrho \, d\varrho.$$

Wegen $0 < \alpha < 1$ ist

$$\int_2^t \operatorname{Sin}\varrho \operatorname{Sin}\alpha\varrho \, d\varrho = \frac{e^{(1+\alpha)t}}{4(1+\alpha)} + O(e^t)$$

und

$$\left| \int_t^{t+e^{-t/2}} k(\varrho) \operatorname{Sin}\varrho \operatorname{Sin}\alpha\varrho \, d\varrho \right| \leqq \int_t^{t+e^{-t/2}} \operatorname{Sin}^2\varrho = O(e^{3/2\,t}),$$

mithin

$$\int_0^\infty F_t(\varrho) \operatorname{Sin}\varrho \operatorname{Sin}\alpha\varrho \, d\varrho = \frac{e^{(1+\alpha)t}}{4(1+\alpha)} + O(e^{3/2\,t}) \quad \text{für} \quad t \to +\infty. \tag{13}$$

10. Es ist

$$\int_0^\infty F_t(\varrho)\,\varrho \operatorname{Sin}\varrho \, d\varrho = \int_1^2 g(\varrho)\,\varrho \operatorname{Sin}\varrho \, d\varrho + \int_2^t \varrho \operatorname{Sin}\varrho \, d\varrho + \int_t^{t+e^{-t/2}} k(\varrho)\,\varrho \operatorname{Sin}\varrho \, d\varrho.$$

Wegen

$$\int_2^t \varrho \operatorname{Sin}\varrho \, d\varrho = O(te^t)$$

und

$$\int_t^{t+e^{-t/2}} k(\varrho)\,\varrho \operatorname{Sin}\varrho \, d\varrho = O(te^{t/2})$$

folgt

$$\int_0^\infty F_t(\varrho)\,\varrho \operatorname{Sin}\varrho \, d\varrho = O(te^t) \quad \text{für} \quad t \to +\infty. \tag{14}$$

11. Wegen $g(\varrho) \in C^3$ [1, 2] sind die Maxima

$$M_i = \operatorname*{Max}_{1 \leqq \varrho \leqq 2} |g^{(i)}(\varrho)| \qquad i = 0, 1, 2, 3$$

endlich und somit auch $M = \operatorname*{Max}_{0 \leqq i \leqq 3} M_i$ endlich. Daraus und aus der Definition $k(\varrho) = g(2 - (\varrho - t)e^{t/2})$ ergibt sich für $i = 0, 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \operatorname*{Max}_{t \leqq \varrho \leqq t+e^{-t/2}} |k^{(i)}(\varrho)| &= \operatorname*{Max}_{t \leqq \varrho \leqq t+e^{-t/2}} |(-1)^i e^{it/2} g^{(i)}(2 - (\varrho - t)\, e^{t/2})| \\ &= e^{it/2} \operatorname*{Max}_{1 \leqq \varrho \leqq 2} |g^{(i)}(\varrho)| \leqq e^{it/2} M, \end{aligned}$$

also

$$\operatorname*{Max}_{t\leqslant\varrho\leqslant t+e^{-t/2}} |k^{(i)}(\varrho)| = O(e^{it/2}) \quad \text{für} \quad t\to+\infty. \tag{15}$$

Anhand dieser Beziehung schätzen wir das Integral

$$\int_0^\infty F_t(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho\,\sin\alpha\varrho\,d\varrho$$

auf zwei Arten ab.

(A) Die partielle Integration liefert unter Beachtung der Definition von $F_t(\varrho)$

$$\int_0^\infty F_t(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho\,\sin\alpha\varrho\,d\varrho = \frac{1}{\alpha}\int_0^\infty (F_t(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'\cos\alpha\varrho\,d\varrho$$

$$= \frac{1}{\alpha}\left[\int_1^2 (g(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'\cos\alpha\varrho\,d\varrho + \int_2^t \mathrm{Cos}\,\varrho\cos\alpha\varrho\,d\varrho + \int_t^{t+e^{-t/2}} (k(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'\cos\alpha\varrho\,d\varrho\right]$$

Man sieht sofort, dass $\int_2^t \mathrm{Cos}\,\varrho\cos\alpha\varrho\,d\varrho = 0(e^t)$. Zudem ergibt sich unter Benützung von (15)

$$\left|\int_t^{t+e^{-t/2}} (k(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'\cos\alpha\varrho\,d\varrho\right| \leqslant \int_t^{t+e^{-t/2}} |(k(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'|\,d\varrho \leqslant e^{-t/2}\,O(e^{t/2})\,O(e^t) = O(e^t),$$

also zusammengefasst

$$\int_0^\infty F_t(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho\,\sin\alpha\varrho\,d\varrho = \frac{1}{\alpha}\,O(e^t) \quad \text{für} \quad t\to+\infty. \tag{16}$$

(B) Dreimalige partielle Integration liefert unter Beachtung der Definition von $F_t(\varrho)$

$$\int_0^\infty F_t(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho\,\sin\alpha\varrho\,d\varrho = -\frac{1}{\alpha^3}\int_0^\infty (F_t(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'''\cos\alpha\varrho\,d\varrho$$

$$= -\frac{1}{\alpha^3}\left[\int_1^2 (g(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'''\cos\alpha\varrho\,d\varrho + \int_2^t \mathrm{Cos}\,\varrho\cos\alpha\varrho\,d\varrho + \int_t^{t+e^{-t/2}} (k(\varrho)\,\mathrm{Sin}\,\varrho)'''\cos\alpha\varrho\,d\varrho\right].$$

Einerseits folgt unmittelbar $\int_2^t \operatorname{Cos}\varrho \cos\alpha\varrho\, d\varrho = 0(e^t)$, andrerseits folgt wegen (15)

$$\left|\int_t^{t+e^{-t/2}} (k(\varrho)\operatorname{Sin}\varrho)''' \cos\alpha\varrho\, d\varrho\right| \leqslant \int_t^{t+e^{-t/2}} |(k(\varrho)\operatorname{Sin}\varrho)'''|\, d\varrho$$

$$\leqslant e^{-t/2}\, 0(e^{3/2t})\, 0(e^t) = 0(e^{2t}),$$

also zusammen

$$\int_0^\infty F_t(\varrho)\operatorname{Sin}\varrho \sin\alpha\varrho\, d\varrho = \frac{1}{\alpha^3}\, 0(e^{2t}) \quad \text{für} \quad t\to+\infty. \tag{17}$$

12. Aus dem im zweiten Abschnitt hergeleiteten asymptotischen Verhalten von $M(x)=\sum_{\lambda\leqslant x} K_\lambda(p)$ folgt die Konvergenz der Reihe $\sum_\lambda (K_\lambda(p)/\alpha^4)$, genauer:

$$\sum_{\lambda\geqslant\lambda_0} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha^4} = \int_{\lambda_0}^\infty \frac{dM(x)}{(x-1)^2} = \left[\frac{M(x)}{(x-1)^2}\right]_{\lambda_0}^\infty + 2\int_{\lambda_0}^\infty \frac{M(x)}{(x-1)^3}\, dx$$

und daher

$$\sum_{\lambda\geqslant\lambda_0} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha^4} = 0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_0}}\right) \quad \text{für} \quad \lambda_0\to+\infty. \tag{18}$$

Analog ergibt sich:

$$\sum_{\lambda<\lambda_0} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha^2} = 0(\sqrt{\lambda_0}) \quad \text{für} \quad \lambda_0\to+\infty. \tag{19}$$

Unter Benützung von (16) und (17) folgt für jedes $\lambda_0 > 1$:

$$\sum_{\lambda>1} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha}\int_0^\infty F_t(\varrho)\operatorname{Sin}\varrho \sin\alpha\varrho\, d\varrho = 0(e^t) \sum_{1<\lambda<\lambda_0} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha^2} + 0(e^{2t}) \sum_{\lambda\geqslant\lambda_0} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha^4}.$$

Wählen wir insbesondere $\lambda_0 = e^t$ und beachten wir (18) und (19), so erhalten wir schliesslich:

$$\sum_{\lambda>1} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha}\int_0^\infty F_t(\varrho)\operatorname{Sin}\varrho \sin\alpha\varrho\, d\varrho = 0(e^{3/2t}) \quad \text{für} \quad t\to+\infty. \tag{20}$$

13. Die Anwendung von (10) auf die rechte Seite von (11) liefert unter Beachtung von (12)–(14) und (20)

$$N(\Gamma, p, t) \leqslant \frac{\pi}{2|\mathfrak{F}|}\, e^{2t} + \pi \sum_{0<\lambda<3/4} \frac{K_\lambda(p)}{\alpha(1+\alpha)}\, e^{(1+\alpha)t} + R(t), \tag{21}$$

wobei $R(t) = 0(e^{3/2t})$ für $t\to+\infty$.

Man sieht leicht, dass die Beziehungen (12)–(14) und (20) richtig bleiben, wenn $F_t(\varrho)$ durch $G_t(\varrho)$ ersetzt wird. Deshalb liefert die Anwendung von (10) auf die linke Seite von (11) wiederum die Ungleichung (21), jedoch mit umgekehrtem Ungleichheitszeichen. Daraus ergibt sich aber der im ersten Abschnitt ausgesprochene Hauptsatz.

LITERATURANGABEN

[1] Huber, H., *Über eine neue Klasse automorpher Funktionen und ein Gitterpunktproblem in der hyperbolischen Ebene*, Comment. Math. Helv. *30*, 20–62 (1956).

[2] Huber, H., *Zur analytischen Theorie hyperbolischer Raumformen und Bewegungsgruppen*, Math. Ann. *138*, 1–26 (1959); *142*, 385–398 (1961); *143*, 463–464 (1961).

[3] Herrmann, O., *Über die Verteilung der Längen geodätischer Lote in hyperbolischen Raumformen*, Math. Ztschr. *79*, 323–343 (1962).

[4] Herrmann, O., *Eine neue Klasse von Gitterpunktproblemen im hyperbolischen Raum* I, Math. Ann. *168*, 105–110 (1967).

[5] Fricke, R. und Klein, F., *Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen*, Band 1 (Teubner, Leipzig 1897).

[6] Hilbert, D., *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Teubner, Leipzig und Berlin 1912).

[7] Minakshisundaram, S. und Pleijel, A., *Some Properties of the Eigenfunctions of the Laplace-Operator on Riemannian Manifolds*, Canad. Journ. of Math. *1*, 242–256 (1949)

[8] Selberg, A., *On Discontinous Groups in Higher-Dimensional Symmetric Spaces*, Contr. to Function Theory (Tata Institute, Bombay 1960), 147–164.

[9] Landau, E., *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (Teubner, Leipzig und Berlin 1909).

[10] Wiener, N., *The Fourier Integral and Certain of Its Applications* (University Press, Cambridge, 1933).

[11] Duschek, A. und Mayer, W., *Lehrbuch der Differentialgeometrie*, Band 2 (Teubner, Leipzig und Berlin 1930).

Eingegangen den 14. Januar 1968

Curriculum vitae

Ich, FRANÇOIS FRICKER von Basel, wurde am 26. September 1939 als Sohn des WERNER FRICKER, Kaufmann, wohnhaft in Basel, und der DEBORAH, geb. FRIES, in Basel geboren. Nach dem Ablegen der Maturitätsprüfung am Realgymnasium Basel (Typus B) im April 1958 immatrikulierte ich mich an der Universität Basel, um Mathematik als Hauptfach, Philosophie, Experimentalphysik und Versicherungsmathematik als Nebenfächer zu studieren. In den letztgenannten Fächern habe ich in der angegebenen Reihenfolge in den Jahren 1961, 1962, 1964 die Nebenfachexamina bestanden.

Bei den folgenden Dozenten habe ich Vorlesungen und Übungen besucht: H. BARTH, P. BUCHNER, R. CONZELMANN, M. EICHLER, J. O. FLECKENSTEIN, W. HABICHT, H. HUBER, P. HUBER, K. JASPERS, E. MIESCHER, A. OSTROWSKI, H. A. SALMONY, E. SCHUBARTH, A. SPEISER, E. ZWINGGI.

Seit 1961 bin ich am Mathematischen Institut der Universität bei Herrn Prof. Dr. H. HUBER als Assistent tätig. Ausserdem unterrichtete ich in den Jahren 1959/60 und 1961–1965 an der Oberstufe des Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Gymnasiums Basel mit einem reduzierten Pensum die Fächer Algebra, Geometrie, Darstellende Geometrie.

Allen meinen Lehrern fühle ich mich zu grossem Dank verpflichtet. Insbesondere danken möchte ich Herrn Prof. Dr. H. HUBER für das wohlwollende Interesse, das er mir stets entgegenbrachte. Die Anregung zu der vorliegenden Dissertation ist von ihm ausgegangen. Seine vielen wertvollen Ratschläge haben meine Arbeit stark gefördert.